Concours d'Entrée à l'École des Ingénieurs de la ville de Paris ouvert le 22 avril 1987

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES OPTION M

Durée : 4 h - Coefficient 6

Dans ce problème, on désigne par $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, par $\mathbb{R}$ le corps des réels.

On désigne par $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels à une indéterminée, et par $\mathbb{R}_n[X]$ le sous-espace vectoriel formé des polynômes de degré inférieur ou égal à n et du polynôme nul ($n \in \mathbb{N}$). Etant donné un polynôme P, on désigne également par P la fonction polynôme associée.

Les parties I, II et III sont dépendantes. Il est conseillé de les traiter dans l'ordre. Toutefois, on pourra admettre le résultat d'une question non traitée pour la suite du problème.

PARTIE I

I - 1°/ a) Montrer que pour tout entier naturel n, il existe un et un seul polynôme T_n de $\mathbb{R}[X]$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad T_n(\cos x) = \cos(nx) \qquad (1)$$

b) Expliciter les polynômes T_k pour $0 \leq k \leq 5$.

2°/ a) Montrer que la suite de polynômes $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie la relation :

$$\forall n \geq 2, \quad T_n(X) = 2X\,T_{n-1}(X) - T_{n-2}(X) \qquad (2)$$

b) Déterminer le terme de plus haut degré de T_n en fonction de l'entier n. Quelle est la parité de T_n ?

c) Montrer que pour tout entier naturel n :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad T_n(\operatorname{ch} x) = \operatorname{ch}(nx) \qquad (3)$$

d) Montrer que :

$$\begin{cases} \forall x \in [-1,1], & |T_n(x)| \leq 1 \\ \forall x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[, & |T_n(x)| > 1 \end{cases} \qquad (4)$$

e) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, le polynôme T_n a n zéros réels et simples. On notera ces zéros $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de sorte que :

$$x_1 > x_2 > \cdots > x_n \qquad (5)$$

et on donnera une expression de x_k en fonction de l'entier k $(1 \leq k \leq n)$

PARTIE II

Dans cette partie et dans la suivante, E désigne le $\mathbb{R}$ - espace vectoriel des fonctions continues sur $[-1,1]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et pour tout entier naturel n, $\mathcal{P}_n$ est le sous-espace vectoriel de E formé des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à n et de la fonction nulle sur $[-1,1]$.

II 1°/ Soit f un élément de E. Montrer que l'intégrale

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \qquad (6)$$

est convergente.

2°/a) Montrer que l'application φ définie par

$$\forall (f,g) \in E \times E, \quad (f,g) \xrightarrow{\varphi} \varphi(f,g) = \int_{-1}^{1} \frac{f(x)\,g(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \in \mathbb{R} \qquad (7)$$

est un produit scalaire sur E.

b) En déduire que l'application

$$\forall f \in E, \quad f \longmapsto \|f\| = \sqrt{\varphi(f,f)} \in \mathbb{R}_+ \qquad (8)$$

est une norme sur E.

3°/a) Calculer l'intégrale :

$$I_{m,n} = \int_{-1}^{1} \frac{T_m(x)\,T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \qquad (9)$$

en fonction des entiers naturels m et n.

b) En déduire une base orthonormale $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ de $\mathcal{P}_n$ telle que pour tout entier $k \leq n$, $d^\circ P_k = k$.

c) Démontrer que l'intégrale :

$$\int_{-1}^{+1} \frac{x^k\,T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \qquad (10)$$

est nulle si $0 \leq k < n$

4°/a) Soit f un élément de E. Montrer que pour tout entier naturel n, il existe un et un seul polynôme Q_n de $\mathcal{P}_n$ tel que :

$$\forall R \in \mathcal{P}_n, \quad \|f - Q_n\| \leq \|f - R\| \qquad (11)$$

On donnera Q_n sous la forme :

$$Q_n = a_0 T_0 + a_1 T_1 + \ldots + a_n T_n \qquad (12)$$

et on précisera l'expression de a_k en fonction de l'entier k.

Tournez la page S. V. P.

b) Application : on donne la fonction f définie par :

$$\forall x \in [-1,1], \quad f(x) = x^3 + x^2 \qquad (13)$$

Déterminer les polynomes Q_0, Q_1, Q_2 et Q_3 associé à f et tracer sur une même figure les représentations graphiques des Q_i. L'unité de longueur sur les axes sera prise égale à 5 cm.

5°/ Soit f un élément de E. On admet que pour tout réel ε strictement positif, il existe une fonction polynôme P telle que

$$\forall x \in [-1,1], \quad |f(x) - P(x)| < \varepsilon \qquad (14)$$

a) Montrer que la suite $\{Q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ associée à f (définie au 4°)a)) converge vers f pour la norme $\| \ \|$.

b) En déduire que la série de terme général $u_n = a_n^2$ est convergente.
Que peut-on dire de la nature de la série de terme général a_n? $\not\propto$

PARTIE III :

III 1°/a) On considère les réels x_1, x_2, x_3, définis en I 2°/e) pour $n = 3$.
Déterminer trois réels C_1, C_2, C_3 tels que :

$$\forall f \in \mathcal{P}_2, \int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = C_1 f(x_1) + C_2 f(x_2) + C_3 f(x_3) \qquad (15)$$

b) Montrer que la formule précédente reste vraie pour tout élément f de $\mathcal{P}_5$.
(on pourra utiliser une division euclidienne par T_3).

c) Montrer que la formule précédente est fausse pour une fonction polynôme f de degré 6 (on pourra exhiber une fonction particulière pour laquelle elle est fausse).

2°/a) Plus généralement, étant donné les zéros x_k ($1 \leq k \leq n$) de T_n, montrer qu'il existe n réels $C_1, C_2, \ldots C_n$ tels que :

$$\forall f \in \mathcal{P}_{n-1}, \int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \sum_{k=1}^{n} C_k f(x_k) \qquad (16)$$

b) Montrer que la formule précédente reste vraie pour une fonction polynôme f de $\mathcal{P}_{2n-1}$

c) Montrer que la formule précédente est fausse pour une fonction polynôme f de degré $2n$.

3°/ On définit, pour toute fonction f de E et pour tout entier naturel n, le réel :

$$I_n(f) = \sum_{k=1}^{n} C_k f(x_k) \qquad (17)$$

avec les notations du 2°)a).

Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} I_n(f) = \int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \qquad (18)$$

• • •